Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - Maramureş

Clasa a X-a

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$ cu cel puțin două elemente și funcția $f : A \to A$ astfel încât

$$\forall\, x \in A,\ \ (f \circ f)(x) = 2016 \cdot f(x) - 2015x .$$

2 p **a)** Să se demonstreze că f nu poate fi strict descrescătoare.

2 p **b)** Dacă $A = \mathbb{R}$, să se arate că există o infinitate de funcții bijective care verifică relația din enunț.

3 p **c)** Să se determine f, dacă A este finită.

7 p **2.** Să se arate că $2016^{\log_{2015} 2014} > 2014^{\log_{2016} 2017}$

Traian Covaciu

3. Să se demonstreze că dacă $a > 0,\ a \neq 1,$ atunci există o infinitate de perechi de numere reale strict pozitive (x, y) astfel încât:

3 p **a)** $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$.

4 p **b)** $\log_a(x+y) = (\log_a x)\cdot(\log_a y)$.

Dana Heuberger

7 p **4.** Fie O și H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC .
Demonstrați că dacă $HA = OA$ și $HB = OB$, atunci $HC = OC$.

Lucian Dragomir, S.L14.337, G.M. 12 / 2014

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de:
Dana Heuberger, C.N. „Gheorghe Șincai” Baia Mare
Traian Covaciu, C. N. „Vasile Lucaciu” Baia Mare